

---

Université  
de Liège



# *1, 2, 3... Sciences*

*Année académique 2013-2014*

---

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES  
RÉVISIONS EN VUE DE L'INTERROGATION DU 25 AVRIL 2014

---

# RÉPÉTITION 8 : RÉVISIONS

## A préparer AVANT de venir à la répétition

1. On donne la fonction  $f$  par

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

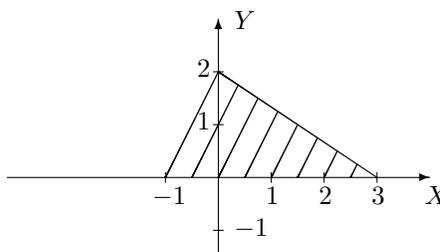
- Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.
  - Calculer la dérivée de  $f$  par rapport à sa deuxième variable.
  - Déterminer l'expression explicite de  $F(t) = f(5t^2 - 1, 2t)$ , le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée en tout point du domaine.
  - Si  $F$  est dérivable en  $1/6$ , que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.
2. On donne la fonction  $f$  continûment dérivable sur  $]1, 2[ \times ]0, 1[$  et à valeurs strictement positives.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de  $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3 - x)))$ .
  - Calculer la dérivée de  $g$  en fonction de  $f$  et de ses dérivées partielles.
  - Si  $g$  est dérivable en  $5/2$ , que vaut sa dérivée en ce point ?
3. a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation

$$4x^2 + 4y^2 - z + 1 = 0.$$

- Quel est le nom de cette quadrique ?
- Calculer le volume du corps borné par les plans de coordonnées, le plan d'équation  $x + y = 1$  et la surface donnée ci-dessus.

4. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer

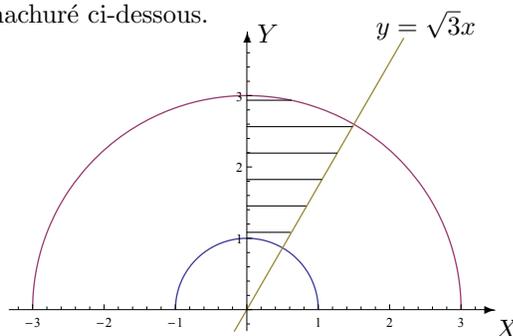
$$\iint_A y e^{y-2x} dx dy.$$



5. Calculer, si possible l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{x}{y} dx dy,$$

où  $A$  est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



6. La fonction  $f$  étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si

$$I = \int_0^2 \left( \int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x, y) dy \right) dx.$$

7. Calculer, si possible, les intégrales suivantes et représenter leurs ensembles d'intégration.

$$\text{a) } \int_1^{+\infty} \left( \int_{-x^2}^{-x} \frac{y e^{2x}}{x^2} dy \right) dx \qquad \text{b) } \int_{-\infty}^0 \left( \int_x^0 \sin(x-y) e^x dy \right) dx$$

8. La matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable? Pourquoi?

Si oui, en déterminer une forme diagonale  $\Delta$  ainsi qu'une matrice inversible  $S$  qui y conduit.

9. Soient les matrices  $A$  et  $B$  données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

$$1) A + \tilde{B} \qquad 2) C = AB \qquad 3) C^{-1}$$